APÊNDICE AO CAPÍTULO 25

CÁLCULO DO INSTANTE DA PASSAGEM MERIDIANA DO SOL VERDADEIRO. CIRCUNSTÂNCIAS FAVORÁVEIS PARA O CÁLCULO DA LATITUDE

1 INTRODUÇÃO

Como vimos no corpo do Capítulo 25, os **métodos aproximados** de previsão da Hora Legal da **passagem meridiana superior** do **Sol**, descritos no item 25.3, proporcionam a precisão necessária para os objetivos da **Navegação Astronômica**, tendo em vista que, para o navegante, a única finalidade do cálculo é obter a hora aproximada do fenômeno, a fim de estar pronto para observar com o sextante a altura meridiana do Sol, para determinação da Latitude no mar.

Entretanto, é interessante que o navegante conheça os processos precisos e os outros métodos aproximados descritos a seguir.

2 PROCESSO DA ALTURA MÁXIMA

Para um observador situado num ponto qualquer da superfície da Terra, um astro será observado na sua altura máxima no instante em que cruzar o meridiano superior do observador; sua altura mínima, por outro lado, será atingida no momento da passagem meridiana inferior.

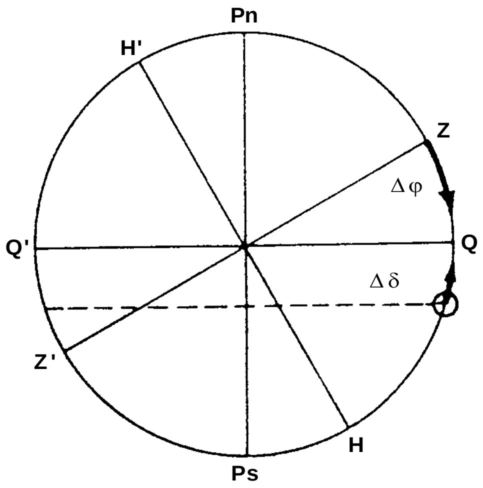
Um astro que se encontre um pouco a Leste do meridiano estará, evidentemente, prestes a efetuar a passagem pelo meridiano superior. Tomando-se uma série de alturas deste astro durante o seu movimento ascendente, até que ele inicie seu movimento descendente e registrando-se as alturas observadas e as horas correspondentes, pode-se considerar que a passagem meridiana superior terá ocorrido no instante em que o astro houver atingido sua altura máxima, também chamada altura meridiana ou de culminação.

No caso de pretendermos determinar o instante da passagem meridiana inferior, deveremos iniciar a tomada de alturas do astro quando ele estiver um pouco a Oeste do meridiano inferior, acompanhando-o no seu movimento descendente, até que ele atinja sua altura mínima, também chamada altura meridiana inferior. O instante da passagem meridiana inferior corresponderá, desse modo, àquele em que foi assinalada a altura mínima do astro.

Este processo é demorado e cansativo, sendo que, muitas vezes, uma nuvem impede que seja levado a cabo. Ainda assim, é utilizado para as observações meridianas do Sol, mas, com respeito a outros astros, seu emprego é bastante raro.

Para uma posição fixa, o processo é inteiramente preciso, supondo que as observações hajam sido efetuadas com exatidão. Com o propósito de evitar erros, traça-se, em papel milimetrado, uma curva das alturas observadas em função das horas correspondentes. A altura indicada pela parte superior (ou inferior) da curva será a altura meridiana, que deverá ser adotada no cálculo da Latitude, como mostrado na figura 25.1a, no corpo do capítulo.

Figura 25A.1 –



Existe um caso, entretanto, no qual o presente método não deve ser aplicado. Isto ocorre quando o navio em movimento tem sua posição em Latitude variando rapidamente. Suponhamos, por exemplo, que um navio, situado na Latitude de 45º N, navega no rumo 151º com velocidade de 20 nós. Seu Encarregado de Navegação pretende observar a passagem meridiana do Sol, cuja declinação é 20º S, utilizando o processo da altura máxima. Será isso possível? A que erros estaria ele exposto?

Consultando a Tábua do Ponto verificamos que o navio estaria alterando sua Latitude à razão de 17,5' por hora, ou 3,5' em 12 minutos. Em conseqüência, o Zênite e o horizonte do navio estariam se movendo para o Sul com uma velocidade de 3,5' em 12 minutos, o que acarretaria para o Sol, se o considerássemos estacionário, um aumento na sua altura na razão de 3,5' em 12 minutos.

Por outro lado, na Extra-Meridiana Tábua I (ver a publicação Tábuas para Navegação Astronômica, DN 4-2), encontramos 1,4" para o valor da variação que sofre a altura do Sol no intervalo de tempo de 1 minuto, anterior ou posterior ao instante da sua passagem meridiana, devida ao seu próprio movimento no **círculo diurno**. Na Extra-Meridiana Tábua II verificamos que o Sol, nos 12 minutos que sucedem a hora da passagem meridiana, apresenta uma variação de 3,4' na sua altura. Assim sendo, se o navio permanecesse estacionário com respeito à Latitude, a altura do Sol diminuiria 3,4' nos 12 minutos seguintes à passagem meridiana, supondo que sua Declinação não variasse. Porém, a mudança em Latitude do navio nestes mesmos 12 minutos causaria, conforme já foi mencionado, um aumento de 3,5' na altura do Sol, donde se conclui que a altura deste astro, quer fosse ele observado no instante da passagem meridiana ou 12 minutos mais tarde, manter-se-ia aproximadamente a mesma, sendo a altura máxima atingida cerca de 6 minutos após a passagem pelo meridiano. Por outro lado, se o navio estivesse navegando no rumo oposto (331º), o Sol atingiria a sua altura máxima cerca de 6 minutos antes da sua passagem pelo meridiano. Fica, assim, demonstrado o erro que estaria sendo cometido pelo Encarregado de Navegação ao considerar como **altura meridiana** a **máxima altura** do astro por ele observada.

Acontece, entretanto, que o PROCESSO DA ALTURA MÁXIMA poderá, em qualquer circunstância, ser aplicado na determinação do instante da passagem meridiana, desde que conheçamos o ângulo no pólo local do astro no instante da **culminação** (máxima altura).

Basta que saibamos que:

$$t_1(c) = \frac{\Delta\delta - \Delta\varphi}{2\alpha}$$

em que $\Delta\varphi$ e $\Delta\delta$ representam, respectivamente, as variações da Latitude do observador e da Declinação do astro, expressas em segundos de arco por minuto de tempo. Em α temos a variação que sofre a altura do astro, expressa em segundos de arco, no intervalo de tempo de 1 minuto, anterior ou posterior ao instante da sua passagem meridiana.

O resultado (t_1) é o ângulo no pólo local, expresso em **minutos de tempo**, no instante em que o astro atinge sua máxima altura. Este ângulo no pólo, t_1 (c), será **E** se o astro culminar antes da passagem meridiana, o que acontecerá se a resultante dos movimentos em Declinação do astro ($\Delta\delta$) e em Latitude do navio ($\Delta\varphi$) for no sentido de diminuir a altura do astro; e será **W** se o astro culminar após a passagem meridiana, isto é, se a resultante dos movimentos já citados for no sentido de aumentar a altura do astro.

Teríamos assim:

$$\text{Hleg pmd} = \text{Hleg c} \begin{cases} + \ t_1\,(c) \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\text{LESTE}) \\ - \ t_1\,(c) \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\text{OESTE}) \end{cases}$$

A utilização do PROCESSO DA ALTURA MÁXIMA levaria, ainda, o observador a cometer o erro de considerar a altura máxima como meridiana. A fórmula que se segue permite-nos, entretanto, conhecer o valor deste erro.

$$a\ md = ac - \frac{(\Delta\delta - \Delta\varphi)^2}{4\alpha}$$

A fração $\frac{(\Delta\delta - \Delta\varphi)^2}{4\alpha}$ representa o valor do erro procurado; ela deverá ser sempre subtraída da **altura máxima** observada para se ter a **altura meridiana**.

Os valores $\Delta\delta$ e $\Delta\varphi$ receberão os sinais **mais** ou **menos**, conforme indiquem, respectivamente, variação da Declinação ou da Latitude no sentido NORTE ou SUL.

EXEMPLOS:

1. No dia 2 de janeiro de 1993, às 0800 (HMG), navegava o CT "PERNAMBUCO" no rumo 180º, com a velocidade de 25 nós, estando na Latitude 35º 10,0' N e Longitude 043º 18,0' E.

Pergunta-se:

a. Qual o erro cometido pelo Encarregado de Navegação se houvesse considerado a **altura máxima** do Sol como sendo a **altura meridiana**?

b. Que tempo teria decorrido entre a **passagem meridiana** e o instante em que o Sol atingiu sua **altura de culminação**? Fazer um gráfico elucidativo da questão e justificar se a **culminação** ter-se-ia dado antes ou depois da **passagem meridiana**.

SOLUÇÃO:

a. Dia 02/01/93, HMG = 0800 $\left\{ \begin{array}{l} \delta_{\odot} = 22^{\circ}\ 54{,}2'\ S \\ \Delta\delta = 0{,}2' \text{ em 1 hora ou } 0{,}2'' \text{ em } 01^{m} \ldots. \text{ (N)} \end{array} \right.$

R = 180º, d = 25' $\left\{ \begin{array}{l} \text{TÁBUA DO PONTO} \\ \Delta\varphi = 25{,}0' \text{ em 1 hora ou } 25{,}0'' \text{ em } 01^{m} \text{ .. (S)} \end{array} \right.$

$\varphi = 35^{\circ}\ 10{,}0'\ N$, $\delta_{\odot} = 22^{\circ}\ 54{,}2'\ S$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{EXTRA-MERIDIANA (TÁBUA I)} \\ \alpha = 1{,}7'' \end{array} \right.$

$$a\ md = ac - \frac{(\Delta\delta - \Delta\varphi)^2}{4\alpha} = ac - \frac{[+\ 0{,}2'' - (-\ 25{,}0'')]^2}{4 \times 1{,}7''} =$$

$$= ac - \frac{(25{,}\ 2'')^2}{6{,}8''} = ac - 93{,}4'' = ac - 1'\ 33{,}4''$$

O erro cometido na altura teria sido, portanto, de 1' 33,4".

b. $$t_1(c) = \frac{\Delta\delta - \Delta\varphi}{2\alpha} = \frac{+\ 0{,}2'' - (-25{,}0'')}{2 \times 1{,}7''} = \frac{25{,}2''}{3{,}4''} = 7{,}4^{m}\ W$$

Donde se conclui que o astro teria atingido a **altura máxima** 7,4 minutos após o instante da passagem meridiana e isto porque, conforme nos indica a figura 25A.1, a resultante dos movimentos, $\Delta\varphi$ e $\Delta\delta$, era no sentido de **aumentar** a altura do astro.

2. No dia 18 de maio de 1993, às 1500 (HMG), um navio desenvolvia a velocidade de 32 nós, no rumo 000º, estando na Latitude 44º 00,0' N e Longitude 045º 30,0' W.

Pergunta-se:

a. Qual o erro cometido se a **altura máxima** do Sol houvesse sido considerada como sendo a **altura meridiana**?

b. Que tempo teria decorrido entre a **passagem meridiana** e o instante em que o Sol atingiu sua **altura de culminação**? Fazer um gráfico elucidativo da questão e justificar se a **culminação** ter-se-ia dado antes ou depois da **passagem meridiana**.

SOLUÇÃO:

a. Dia 18/05/93, HMG = 1500 $\left\{ \begin{array}{l} \delta_{\odot} = 19^{\circ}\ 38{,}5'\ N \\ \Delta\delta = 0{,}5' \text{ em 1 hora ou } 0{,}5'' \text{ em } 01^{m} \ldots. \text{ (N)} \end{array} \right.$

R = 000º, d = 32' $\left\{ \begin{array}{l} \text{TÁBUA DO PONTO} \\ \Delta\varphi = 32{,}0' \text{ em 1 hora ou } 32{,}0'' \text{ em } 01^{m} \text{ .. (N)} \end{array} \right.$

$\varphi = 44^{\circ}\ 00{,}0'\ N$, $\delta = 19^{\circ}\ 38{,}5'\ N$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{EXTRA-MERIDIANA (TÁBUA I)} \\ \alpha = 3{,}3'' \end{array} \right.$

$$a\ md = ac - \frac{(\Delta\delta - \Delta\varphi)^2}{4\alpha} = ac - \frac{(+\ 0{,}5'' - 32{,}0'')^2}{4 \times 3{,}3''} =$$

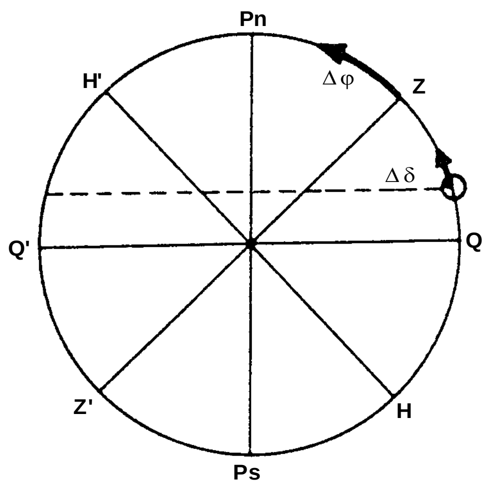
$$= ac - \frac{992{,}\ 25''}{13{,}2''} = ac - 75{,}2'' = ac - 1'\ 15{,}2''$$

O erro cometido na altura teria sido, portanto, de 1' 15,2".

b. $$t_1(c) = \frac{\Delta\delta - \Delta\varphi}{2\alpha} = \frac{+0{,}5'' - 32{,}0''}{2 \times 3{,}3''} = -\frac{31{,}5''}{6{,}6''} = -4{,}8^m\ E$$

Donde se conclui que o astro teria atingido a **altura máxima** 4,8 minutos antes do instante da passagem meridiana e isto porque, conforme nos indica a figura 25A.2, a resultante dos movimentos, $\Delta\varphi$ e $\Delta\delta$, era no sentido de **diminuir** a altura do astro.

Figura 25A.2 –



3 PROCESSO DO AZIMUTE

Um astro pode ser observado com auxílio de uma agulha, e sua altura tomada quando esteja sobre o meridiano, ou seja, quando se ache diretamente no Azimute Verdadeiro NORTE ou SUL, conforme a situação em que ele se apresente em relação ao observador. Se a agulha for precisa, se o navio não estiver dando guinadas e se o astro não estiver em grande altura, o que prejudica sensivelmente a determinação do Azimute correto, este processo dará resultados bastante aceitáveis. O instante em que o astro for observado no Azimute 000º (ou 180º) assinalará, assim, a hora da **passagem meridiana**. Este método, entretanto, raramente é usado na prática.

4 PROCESSO DE CÁLCULO

A hora em que um astro qualquer cruzará um determinado meridiano pode ser calculada com antecipação. Para um navio em movimento, a exatidão deste cálculo dependerá da precisão que se tenha no conhecimento da Longitude. Por esta razão, entre outras, é prática corrente a observação do Sol pela manhã, quando ainda se encontra bem a Leste, de modo que se possa ter uma boa Longitude. A Longitude determinada é transportada por rumo e distância navegada até a hora estimada da **passagem meridiana** do astro, levando-se em conta neste transporte os efeitos de corrente e abatimento; a nova Longitude encontrada, após o transporte, será a utilizada no cálculo preciso do instante da passagem meridiana.

O instante da passagem meridiana do Sol Verdadeiro pode não só ser previsto com toda exatidão, através de rigoroso processo de cálculo, como, também, determinado antecipadamente por outros métodos menos precisos, mas de solução bem mais simples.

Os processos aproximados de cálculo são os normalmente preferidos pelo navegante, não porque sejam mais fáceis, mas sim porque a utilidade deste problema restringe-se unicamente a permitir que se saiba a ocasião em que se deve subir ao tijupá para observar a altura meridiana, de acordo com os procedimentos já descritos anteriormente. Assim sendo, o conhecimento da hora aproximada da passagem meridiana do astro é mais do que satisfatório para o propósito em causa.

a. PROCESSO RIGOROSO. MÉTODO DE TODD

EXEMPLOS:

1. Um navio se achava, às 0530 (HMG) do dia 16 de maio de 1993, na posição Latitude 07º 42,0' S e Longitude 048º 08,0' E, navegando no rumo 180º, com a velocidade de 20 nós. Calcular a Hora Legal da **passagem meridiana** do **Sol Verdadeiro**.

SOLUÇÃO:

O MÉTODO DE TODD consiste em calcular o intervalo de tempo entre a **passagem meridiana** e o instante em que foi obtida a **Longitude** pela manhã. Para isso, embora este intervalo seja medido em tempo verdadeiro, o MÉTODO DE TODD considera o **Sol Verdadeiro** se movendo com a mesma velocidade do **Sol Médio**. Pode-se desprezar o erro proveniente desta hipótese. Calculemos, pois, o ângulo no pólo do **Sol Verdadeiro** no instante em que se obteve a **Longitude** pela manhã. Este cálculo pode ser efetuado por qualquer dos processos indicados a seguir:

CÁLCULO DE t_1

a. Pela Equação do Tempo fornecida pelo Almanaque Náutico:

$$
\begin{array}{rl}
HMG & = 05^h\ 30^m\ 00{,}0^s \\
ET & = +\quad 03^m\ 41{,}5^s \\
\hline
HVG & = 05^h\ 33^m\ 41{,}5^s \\
\lambda & = 03^h\ 12^m\ 32{,}0^s\ E \\
\hline
HVL & = 08^h\ 46^m\ 13{,}5^s \\
t_1 & = 03^h\ 13^m\ 46{,}5^s\ E \\
t_1 & = 193{,}8^m\ E
\end{array}
$$

b. Pelo ângulo horário fornecido pelo Almanaque Náutico:

$$
\begin{array}{rl}
AHG{:}\ 05^h & = 255^\circ\ 55{,}4' \\
acréscimo{:}\ 30^m & = 07^\circ\ 30{,}0' \\
\hline
AHG{:}\ HMG & = 263^\circ\ 25{,}4' \\
\lambda & = 048^\circ\ 08{,}0'\ E \\
\hline
AHL & = 311^\circ\ 33{,}4' \\
t_1 & = 48^\circ\ 26{,}6'\ E \\
t_1 & = 193{,}8^m\ E
\end{array}
$$

CÁLCULO DO INTERVALO DE TEMPO ATÉ A PASSAGEM MERIDIANA

Como o navio está navegando sobre um meridiano (R = 180º), o valor t_1 calculado representa o intervalo de tempo entre o instante em que se obteve a Longitude pela manhã e o instante da passagem do Sol por este meridiano; em outras palavras, o Sol, no seu movimento aparente, deslocando-se para Oeste à razão de 900' por hora (360º em 24 horas), alcançaria o meridiano do navio em $193{,}8^m$. O mesmo raciocínio seria aplicado no caso de estar o navio parado.

CÁLCULO DA HORA LEGAL DA PASSAGEM MERIDIANA

$$\begin{array}{rl}
\text{HMG} = & 05^h\ 30^m\ 00{,}0^s \\
f = & 03^h \qquad\qquad C \\
\hline
\text{Hleg} = & 08^h\ 30^m\ 00{,}0^s \\
t_1 = & 03^h\ 13^m\ 46{,}5^s\ E \\
\hline
\text{Hleg pmd} = & 11^h\ 43^m\ 46{,}5^s \quad \cong 1144
\end{array}$$

2. No dia 4 de maio de 1993, às 0900 (HMG), um navio encontrava-se na posição Latitude 48º 15,0' N e Longitude 017º 05,0' W, navegando no rumo 045º, com a velocidade de 15 nós. Calcular, pelo MÉTODO DE TODD, a Hora Legal da **passagem meridiana** do **Sol verdadeiro**.

SOLUÇÃO:

CÁLCULO DE t_1

a. Pela Equação do Tempo:

$$\begin{array}{rl}
\text{HMG} = & 09^h\ 00^m\ 00{,}0^s \\
\text{ET} = & +\ \ 03^m\ 14{,}2^s \\
\hline
\text{HVG} = & 09^h\ 03^m\ 14{,}2^s \\
\lambda = & 01^h\ 08^m\ 20{,}0^s\ W \\
\hline
\text{HVL} = & 07^h\ 54^m\ 54{,}2^s \\
t_1 = & 04^h\ 05^m\ 05{,}8^s\ E \\
t_1 = & 245{,}1^m\ E
\end{array}$$

b. Pelo ângulo horário fornecido pelo Almanaque Náutico:

$$\begin{array}{rl}
\text{AHG:HMG} = & 315^\circ\ 48{,}7' \\
\lambda = & 017^\circ\ 05{,}0'\ W \\
\hline
\text{AHL} = & 298^\circ\ 43{,}7' \\
t_1 = & 61^\circ\ 16{,}3'\ E \\
t_1 = & 245{,}1^m\ E
\end{array}$$

CÁLCULO DO INTERVALO DE TEMPO ATÉ A PASSAGEM MERIDIANA

Se o navio estivesse parado ou navegando sobre um meridiano, o Sol, movendo-se para Oeste à razão de 900' por hora, alcançaria o meridiano do navio em 245,1 minutos. Mas, como o navio está navegando no rumo 045º, teremos que levar em conta seu movimento em Longitude, pois a velocidade de aproximação do Sol não será mais de 900' por hora e sim uma combinação das duas velocidades, a do Sol e a do navio, ambas contadas sobre o Equador.

Determinemos, então, com auxílio da Tábua do Ponto, o caminho em Longitude percorrido pelo navio em 1 hora:

$$\left.\begin{array}{l} R = 045^{\circ} \\ d = 15' \end{array}\right\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi = 10{,}6'\ N \\ ap = 10{,}6'\ E \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 & = & 48^{\circ}\ 15{,}0'\ N \\ \Delta\varphi & = & 10{,}6'\ N \\ \hline \varphi_2 & = & 48^{\circ}\ 25{,}6'\ N \\ \varphi_1 & = & 48^{\circ}\ 15{,}0'\ N \\ \hline 2\varphi m & = & 96^{\circ}\ 40{,}6'\ N \\ \varphi m & = & 48^{\circ}\ 20{,}3'\ N \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi m = 48^{\circ}\ 20{,}3'\ N \\ ap = 10{,}6'\ E \end{array}\right\{ \ \Delta\lambda = 15{,}9'\ E$$

Conclui-se, então, que o Sol e o navio estariam se aproximando a uma velocidade igual a 900' + 15,9' por hora (isto é, 900' devidas ao movimento do Sol para **W**, sobre o Equador, e 15,9' devidas ao movimento do navio para **E**, também sobre o Equador).

Evidentemente, o navio e o Sol atingirão o mesmo meridiano mais cedo do que se fosse suposto que o navio não mudaria sua Longitude. Segue-se, pois, que o intervalo de tempo até a passagem meridiana será, neste caso, menor que no anterior (EXEMPLO Nº 1) na razão de $\frac{900}{915{,}9}$ e, portanto, igual a $245{,}1^{m} \times \frac{900}{915{,}9}$.

O raciocínio que nos permite armar tal proporção é o seguinte: se o Sol, caminhando 900' por hora sobre o Equador, gasta $245{,}1^{m}$ para alcançar o meridiano do navio parado, quanto tempo levarão Sol e navio, caminhando com a velocidade relativa de 915,9' por hora sobre o Equador, para alcançarem o mesmo meridiano?

$$I = \frac{245{,}1^{m} \times 900}{915{,}9} = 240{,}8^{m} = 04^{h}\ 00^{m}\ 48{,}0^{s}$$

CÁLCULO DA HORA LEGAL DA PASSAGEM MERIDIANA

$$\begin{array}{rcl} HMG & = & 09^{h}\ 00^{m}\ 00{,}0^{s} \\ f & = & 01^{h}\ \ N \\ \hline Hleg & = & 08^{h}\ 00^{m}\ 00{,}0^{s} \\ I & = & 04^{h}\ 00^{m}\ 48{,}0^{s} \\ \hline Hleg\ Pmd & = & 12^{h}\ 00^{m}\ 48{,}0^{s} \cong 1201 \end{array}$$

b. MÉTODOS APROXIMADOS

No corpo do Capítulo 25 (item 25.3), foram explicados os dois métodos aproximados mais utilizados pelo navegante para previsão da Hora Legal da passagem meridiana superior do Sol:

I. UTILIZANDO AS INFORMAÇÕES DO ALAMANAQUE NÁUTICO SOBRE A HORA MÉDIA LOCAL (HML) DA PASSAGEM MERIDIANA DO SOL;

II. UTILIZANDO A HORA VERDADEIRA E A EQUAÇÃO DO TEMPO (ET) PARA CALCULAR A HORA LEGAL DA PASSAGEM MERIDIANA DO SOL.

Resta, ainda, mencionar um último método aproximado:

III. MÉTODO DO ÂNGULO NO PÓLO EM GREENWICH PARA DETERMINAR A HORA DA PASSAGEM MERIDIANA DO SOL.

Sabendo que o ângulo no pólo é medido sobre o Equador Celeste e que a Longitude é medida sobre o Equador terrestre, concluimos haver perfeita correspondência entre um e outro elemento.

Ora, quando o Sol está passando no meridiano do observador, o ângulo no pólo em Greenwich do Sol corresponde à Longitude do observador. Assim sendo, a estima da Longitude em que estará o navio por ocasião da passagem meridiana do Sol nos dará, em primeira aproximação, o valor que teria o ângulo no pólo em Greenwich do Sol naquele instante.

Teríamos então:

$$t_1G = \lambda.$$

Conhecido o valor de t_1G calcularíamos o AHG (tG) e, entrando com este valor no Almanaque Náutico, na coluna AHG, obteríamos o valor correspondente da HMG.

Aplicando o valor do fuso à HMG assim obtida, teremos determinada a Hora Legal da passagem meridiana do astro. Se se tornasse indicada uma segunda aproximação, proceder-se-ia conforme já explicado anteriormente e ilustrado no exemplo que se segue.

EXEMPLO:

No dia 18 de maio de 1993, às 0800 (Hleg), um navio encontrava-se na posição estimada Latitude 00º 00,0' e Longitude 023º 21,2' W, navegando no rumo 090º, com a velocidade de 22 nós. Calcular a Hora Legal da passagem meridiana do Sol em função do ângulo no pólo em Greenwich do astro nesse instante.

SOLUÇÃO:

Admite-se, inicialmente, em primeira aproximação, que a passagem meridiana do Sol ocorreria às 1200 (Hleg) e calcula-se o intervalo de tempo entre este instante e o instante em que foi determinada a posição pela manhã.

Teremos então:

$$I = 1200 - 0800 = 4 \text{ horas}.$$

Podemos agora estimar a posição em que estaria o navio ao fim de 4 horas de navegação.

Seria ela:

$$\varphi e = 00^{\circ}\ 00{,}0'$$
$$\lambda e = 021^{\circ}\ 53{,}2'\ W$$

Quando o navio atingisse a posição acima, a seguinte igualdade poderia ser estabelecida:

$$t_1G = \lambda$$
$$t_1G = 21^{\circ}\ 53{,}2'\ W$$

Donde: $AHG = 21° \ 53,2'$.

Entrando com este valor no Almanaque Náutico, na coluna AHG, obtém-se o valor correspondente da HMG.

Assim:

$$\begin{array}{lll} AHG & = 15° \ 54,3' \rightarrow & HMG = 13^h \ 00^m \ 00,0^s \\ \text{acréscimo} & = 05° \ 58,9' \rightarrow & c = \quad 23^m \ 55,6^s \\ \hline AHG & = 21° \ 53,2' \rightarrow & HMG = 13^h \ 23^m \ 55,6^s \end{array}$$

E a Hora Legal da passagem meridiana do Sol seria então, em primeira aproximação:

$$\begin{array}{ll} HMG & = 13^h \ 23^m \ 55,6^s \\ f & = 02^h \qquad\qquad O \\ \hline Hleg & = 11^h \ 23^m \ 55,6^s \\ Hleg & \cong 11 \ \ 24 \end{array}$$

A obtenção de um resultado mais preciso levar-nos-ia, em segunda aproximação, a estimar a Longitude do navio para as $11^h \ 23^m \ 55,6^s$ (Hleg) e a refazer os cálculos, segundo o mesmo procedimento já seguido anteriormente.

$$\begin{array}{l} Hleg \cong 11 \ \ 24 \quad \rightarrow \quad \lambda e = 022° \ 06,4'W \\ t_1G = \lambda \\ t_1G = 22° \ 06,4' \ W \\ tG = 22° \ 06,4' \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} AHG & = 15° \ 54,3' \rightarrow & HMG = 13^h \ 00^m \ 00,0^s \\ \text{acréscimo} & = 06° \ 12,1' \rightarrow & c = \quad 24^m \ 48,4^s \\ \hline AHG & = 22° \ 06,4' \rightarrow & HMG = 13^h \ 24^m \ 48,4^s \\ & & f = 02^h \qquad\qquad O \\ \hline & & Hleg = 11^h \ 24^m \ 48,4^s \\ & & Hleg \cong 11 \ \ 25 \end{array}$$

Como se vê, após a segunda aproximação, a Hleg da passagem meridiana do Sol variou em cerca de 1 minuto, o que não tem maior significado para o navegante, que, normalmente, começa a observar o Sol aproximadamente 5 minutos antes da hora prevista para a **passagem meridiana** e continua a observação até cerca de 5 minutos depois da referida hora, a fim de garantir a medição da **altura meridiana** do astro.

5 CIRCUNSTÂNCIAS FAVORÁVEIS PARA O CÁLCULO DA LATITUDE

Diz-se que as circunstâncias são as mais favoráveis para o cálculo de um dos elementos do **"triângulo de posição"** quando os erros cometidos nos elementos conhecidos têm a menor influência possível no resultado.

Partindo da fórmula fundamental

$$\cos z = \cos c \ . \ \cos p + \text{sen } c \ . \ \text{sen } p \ . \ \cos t_1$$

Onde:

z = distância zenital do astro (z = 90º – a)
c = colatitude (c = 90º – φe)
p = distância polar do astro (p = 90º ± Dec)
t_1 = ângulo no pólo local (astro a Leste: t_1 = 360º – AHL; astro a Oeste: t_1 = AHL).

Estuda-se, em seguida, os erros na **Latitude** resultantes de erros cometidos na **hora**, na **altura** e na **Declinação**:

a. ERRO NA LATITUDE PROVENIENTE DE UM ERRO NO ÂNGULO NO PÓLO (E, PORTANTO, NA HORA DA OBSERVAÇÃO)

Pode-se, pois, escrever:

$$c = f(t_1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

Dando a $\mathbf{t_1}$ um acréscimo $\Delta\mathbf{t_1}$, resultará para **c** um acréscimo Δc; aplicando a Série de Taylor, tem-se:

$$c + \Delta c = f(t_1 + \Delta t_1) = f(t_1) + \Delta t_1 f'(t_1) + \frac{(\Delta t_1)^2}{2} f''(t_1) + \ldots\ldots$$

Subtraindo esta equação da (1), virá:

$$\Delta c = \Delta t_1 \; f'(t_1) + \frac{(\Delta t_1)^2}{2} f''(t_1) + \ldots\ldots$$

Tratando-se, porém, de um pequeno acréscimo em $\mathbf{t_1}$, é óbvio que o seu valor, assim como o de **c**, não passará de um certo número de minutos; para as necessidades da Navegação, podem ser considerados nulos os termos da Série que se seguem ao primeiro, e, assim, escreve-se:

$$\Delta c = \Delta t_1 \; f'(t_1) = \Delta t_1 \frac{dc}{dt_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2)}$$

Diferenciando a fórmula fundamental para obtenção da derivada $\frac{dc}{dt_1}$, tem-se:

$$O = -\operatorname{sen} c \,.\, \cos p \; dc + \cos c \,.\, \operatorname{sen} p \,.\, \cos t_1 \; dc - \operatorname{sen} c \,.\, \operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen} t_1 \; dt_1$$

$$dc\,(\operatorname{sen} c \,.\, \cos p - \cos c \,.\, \operatorname{sen} p \,.\, \cos t_1) = -\operatorname{sen} c \,.\, \operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen} t_1 \; dt_1$$

$$\frac{dc}{dt_1} = -\frac{\operatorname{sen} c \,.\, \operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen} t_1}{\operatorname{sen} c \,.\, \cos p - \cos c \,.\, \operatorname{sen} p \,.\, \cos t_1} = -\frac{\operatorname{sen} c \,.\, \operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen} t_1}{\operatorname{sen} z \,.\, \cos Z} =$$

$$= -\frac{\operatorname{sen} c \,.\, \operatorname{sen} Z \,.\, \operatorname{sen} t_1}{\operatorname{sen} t_1 \,.\, \cos Z} = -\operatorname{sen} c \,.\, \operatorname{tg} Z$$

Substituindo este valor na expressão (2), virá:

$$\Delta c = -\Delta t_1 \,.\, \operatorname{sen} c \,.\, \operatorname{tg} Z$$

Mas, como a posição estimada é sempre conhecida, pode-se escrever $c = 90° - \varphi$ e $\Delta c = -\Delta\varphi$, o que nos permite chegar à seguinte expressão:

$$\boxed{\Delta\varphi = \Delta t_1 \,.\, \cos\varphi \,.\, \text{tg}\, Z} \quad \text{..........................} \; (3)$$

Verifica-se, assim, que $\Delta\varphi$ será nulo quando se tiver $\varphi = 90°$, $Z = 0°$ ou $Z = 180°$.

Conclui-se, pois, que são condições para as circunstâncias mais favoráveis ao cálculo da Latitude a **passagem meridiana superior ou inferior** e as **altas latitudes**.

b. ERRO NA LATITUDE PROVENIENTE DE UM ERRO NA ALTURA

$$c = f(z)$$

$$\Delta c = f'(z)\, \Delta z$$

Para o cálculo da derivada $f'(z)$, escreve-se:

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos c \,.\, \cos p + \text{sen}\, c \,.\, \text{sen}\, p \,.\, \cos t_1 \\ -\text{sen}\, z\, dz &= -\text{sen}\, c \,.\, \cos p\, dc + \cos c \,.\, \text{sen}\, p \,.\, \cos t_1\, dc \\ \text{sen}\, z\, dz &= (\text{sen}\, c \,.\, \cos p - \cos c \,.\, \text{sen}\, p \,.\, \cos t_1)\, dc \end{aligned}$$

$$\frac{dc}{dz} = \frac{\text{sen}\, z}{\text{sen}\, c \,.\, \cos p - \cos c \,.\, \text{sen}\, p \,.\, \cos t_1} = \frac{\text{sen}\, z}{\text{sen}\, z \,.\, \cos Z} =$$

$$= \frac{1}{\cos Z} = f'(z)$$

Portanto: $\Delta c = \dfrac{\Delta z}{\cos Z}$

Mas: $\Delta c = -\Delta\varphi$ e $\Delta z = -\Delta a$

Logo:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta a}{\cos Z} \quad \text{..} \; (4)$$

Ou: $$\boxed{\Delta\varphi = \Delta a \,.\, \sec Z}$$

Pela expressão acima verifica-se que $\Delta\varphi$ será mínimo quando $Z = 0°$ ou $Z = 180°$, isto é, na **passagem meridiana**. Essa fórmula nos mostra, também, que na passagem meridiana todo erro cometido na **altura** se transmite integralmente à **Latitude**, uma vez que se terá $\Delta\varphi = \Delta a$.

c. ERRO NA LATITUDE PROVENIENTE DE UM ERRO NA DECLINAÇÃO

$$c = f(p)$$

$$\Delta c = f'(p)\, \Delta p$$

Procurando a derivada $f'(p)$, vem:

$$\cos z = \cos c \,.\, \cos p + \text{sen}\, c \,.\, \text{sen}\, p \,.\, \cos t_1$$

$$O = -\cos c \,.\, \text{sen}\, p\, dp - \text{sen}\, c \,.\, \cos p\, dc + \cos c \,.\, \text{sen}\, p \cos t_1\, dc + \text{sen}\, c \,.\, \cos p \,.\, \cos t_1\, dp$$

$$(\text{sen}\, c \,.\, \cos p - \cos c \,.\, \text{sen}\, p \,.\, \cos t_1)\, dc = -(\text{sen}\, p \,.\, \cos c - \cos p \,.\, \text{sen}\, c \,.\, \cos t_1)\, dp$$

$$\text{sen}\, z \,.\, \cos Z\, dc = -\text{sen}\, z \,.\, \cos Ap\, dp$$

$$\frac{dc}{dp} = -\frac{\cos Ap}{\cos Z}$$

Onde Ap é o **ângulo paralático** (ângulo do **"triângulo de posição"** formado no astro, entre o seu **círculo horário** e o seu **vertical**).

Então: $\Delta c = -\Delta p \dfrac{\cos Ap}{\cos Z}$

Logo: $$\boxed{\Delta\varphi = \Delta p \frac{\cos Ap}{\cos Z}} \quad \text{.................... (5)}$$

Pela expressão (5) verifica-se que $\Delta\varphi$ será mínimo quando Z = 0º ou Z = 180º, isto é, na **passagem meridiana**. Essa fórmula mostra, também, que na **passagem meridiana** ter-se-á $\Delta\varphi = -\Delta p$, pois Z = 0º ou 180º e Ap = 180º ou 0º, e, portanto, que um erro cometido na obtenção da Declinação se transmitirá integralmente à Latitude.

Poder-se-ia, também, achar o erro na Latitude proveniente de um erro na Declinação partindo da fórmula:

$$\cos p = \cos c \,.\, \cos z + \text{sen}\, c \,.\, \text{sen}\, z \,.\, \cos Z$$

$$c = f(p)$$

$$-\text{sen}\, p\, dp = -\text{sen}\, c \,.\, \cos z\, dc + \text{sen}\, z \,.\, \cos c \,.\, \cos Z\, dc$$

$$-\text{sen}\, p\, dp = -(\text{sen}\, c \,.\, \cos z - \text{sen}\, z \,.\, \cos c \,.\, \cos Z)\, dc$$

$$\text{sen}\, p\, dp = \text{sen}\, p \,.\, \cos t_1\, dc$$

$$\frac{dc}{dp} = \frac{\text{sen}\, p}{\text{sen}\, p \,.\, \cos t_1} = \frac{1}{\cos t_1}$$

e $$\Delta c = \Delta p \frac{1}{\cos t_1}$$

Teríamos, então: $$\boxed{\Delta\varphi = \pm\, \Delta\delta \frac{1}{\cos t_1}} \quad \text{.................... (6)}$$

Ou: $$\boxed{\Delta\varphi = \pm\, \Delta\delta \sec t_1}$$

Pela expressão (6) verifica-se que $\Delta\varphi$ será mínimo quando t_1 = 0º ou 180º, isto é, na **passagem meridiana**.

d. CONCLUSÕES

Como se acaba de verificar, as expressões

$$\Delta\varphi = \Delta t_1 \,.\, \cos\varphi \,.\, \text{tg}\, Z$$

$$\Delta\varphi = \Delta a \,.\, \sec Z$$

$$\Delta\varphi = \pm\, \Delta\delta \,.\, \sec t_1$$

indicam que o erro cometido na determinação da Latitude será mínimo quando $\varphi = 90^o$, $Z = 0^o$ ou 180^o e $t_1 = 0^o$ ou 180^o, isto é, nas **altas Latitudes** ou na **passagem meridiana**. Estas expressões mostram, também, que, na **passagem meridiana**, os erros cometidos na obtenção da altura observada e na Declinação se transmitem integralmente ao valor da Latitude determinada. Assim, na determinação da Latitude meridiana o navegante deverá ter o máximo de cuidado na medição e correção da altura do Sol e no cálculo da Declinação do astro.